Factor M: **F**ocus **ACT**ion **O**f **R**esearch **M**athematic
Volume 2, Nomor 2, Juni, 2020, 85 – 101
p-ISSN: 2655-3511; e-ISSN: 2656-307X
DOI : 10.30762/f_m.v2i1.1683

MATRIX LAPLACE TRANSFORM METHOD AND IT APPLICATIONS ON SPRING-MASS SYSTEMS

Syamsul Arifin
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
ipien35@yahoo.com

Abstrak: Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menjelaskan Metode Transformasi Laplace Matriks untuk menyelesaikan masalah nilai awal dari sistem persamaan diferensial orde dua koefisien konstan. Sistem persamaan diferensial linear orde dua bentuk normal adalah

$$\boldsymbol{X}''(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{t})$$

dimana $\boldsymbol{X}''(\boldsymbol{t})$ adalah turunan kedua dari $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t})$. $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t})$ adalah vektor kolom dari $x_1(t)$, $x_2(t)$,…,$x_n(t)$. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})$ adalah matriks $n \times n$. Jika entri-entri dari matriks tersebut semuanya konstanta, maka (1) disebut sistem persamaan diferensial linear orde dua koefisien konstan. Jika $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{t})$ semua entrinya sama dengan nol, maka (1) dikatakan homogen. Jika tidak, maka disebut nonhomogen. Selanjutnya, jika nilai dari $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t})$ dan $\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{t})$ pada saat awal diketahui atau $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t_0}) = \boldsymbol{X_0}$ dan $\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{t_0}) = \boldsymbol{X}'_{\boldsymbol{0}}$, maka (1) merupakan masalah nilai awal dari sistem linear orde dua. Pada dasarnya, metode ini adalah gabungan antara Metode Matriks dan Transformasi Laplace. Solusi masalah nilai awal sistem persamaan diferensial orde dua koefisien konstan menggunakan Metode Transformasi Laplace Matriks adalah

$$\boldsymbol{X} = \mathcal{L}^{-1}\{\widehat{\boldsymbol{X}}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s^2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\left(\widehat{\boldsymbol{F}}(s) + s\boldsymbol{X}(\boldsymbol{0}) + \boldsymbol{X}'(\boldsymbol{0})\right)\right\}.$$

Kata kunci : Metode Transformasi Laplace Matriks, masalah nilai awal, sistem persamaan diferensial linear orde dua koefisien konstan, sistem pegas massa.

Abstract: *There are several methods to solve an initial value problem of second-order homogenous linear systems of differential equations with constant coefficients. That are elimination method and matrix method. Whereas to solve nonhomogenous systems, used undetermined coefficient method and variation of parameter method, that through some difficulties and complex procceses. But then, there is an alternative method to solve it. It is Matrix Laplace Transform Method. The goals of the research are to explain Matrix Laplace Transform Method and use it to solve initial value problems of second-order homogenous linear systems of differential equations with constant coefficients that form*

$$\boldsymbol{X}''(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{t})$$

where $\boldsymbol{X}''(\boldsymbol{t})$ *is second derivative from* $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t})$. $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t})$ *is column vector from* $x_1(t)$, $x_2(t)$,…,$x_n(t)$. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})$ *is* $n \times n$ *matrices form. All of matrix entries are constant.*

If all entries of $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{t})$ equal zero, then (1) said homogenous. If not, it is called nonhomogenous. Hence, if value of $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t})$ and $\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{t})$ as initial conditions are known, or $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t_0}) = \boldsymbol{X_0}$ and $\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{t_0}) = \boldsymbol{X}'_{\boldsymbol{0}}$, then (1) is an initial value problem of second-order linear systems. The result of the research is be obtained solutions of second-order linear systems of differential equations with constant coefficients use Matrix Laplace Transform Method is

$$\boldsymbol{X} = \mathcal{L}^{-1}\{\widehat{\boldsymbol{X}}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s^2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\left(\widehat{\boldsymbol{F}}(s) + s\boldsymbol{X}(\boldsymbol{0}) + \boldsymbol{X}'(\boldsymbol{0})\right)\right\}.$$

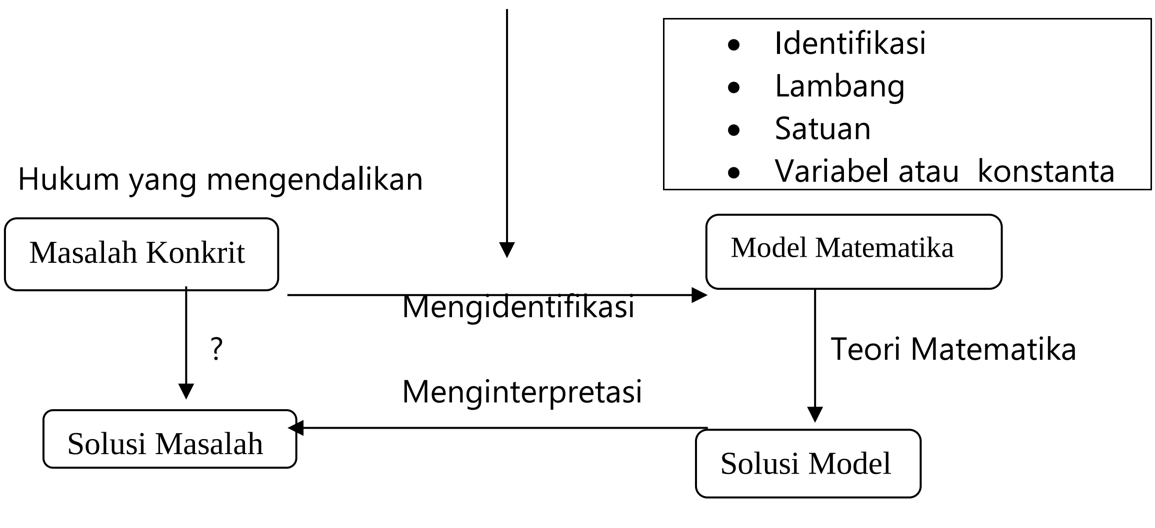
Keyword: *Matrix Laplace Transform Method, initial value problems, second-order systems of linear differential equations with constant coefficients, spring-mass systems.*

Pendahuluan

Dalam kehidupan sehari-hari, terdapat banyak sekali permasalahan yang melibatkan matematika, baik dalam bidang ekonomi, sosial, politik maupun masalah yang berkaitan langsung dengan ilmu eksakta semisal fisika, kimia, *engineering* dan yang lainnya. Objek (masalah) tersebut diidentifikasi, dirumuskan dan dimodelkan untuk kemudian dicari solusinya. Pemodelan yang menggunakan lambang-lambang matematika dan logika untuk menyajikan perilaku objek disebut pemodelan simbolik atau pemodelan matematika (Susanta, 2008: 1.6).

Pemodelan matematika adalah penyelesaian masalah nyata dengan cara menyederhanakan masalah tersebut dengan menggunakan asumsi-asumsi. Tujuan dari pemodelan matematika adalah untuk memberikan gambaran mengenai keadaan, sifat maupun perilaku objek agar lebih mudah dikenali , dipelajari dan dimanipulasi lebih lanjut (Susanta, 2008: 1.4).

Adapun langkah-langkah membangun model matematika adalah sebagai berikut (Raharjati, 2005).



Gambar 1. Langkah-langkah mrmbangun model matematika

p-ISSN: 2655-3511; e-ISSN: 2656-307X
DOI : 10.30762/f_m.v2i1.1683

Salah satu model matematika yang banyak digunakan dalam berbagai permasalahan di bidang lain adalah berbentuk persamaan diferensial. Persamaan diferensial dibagi menjadi dua macam, yaitu Persamaan Diferensial Biasa *(Ordinary Differential Equation)* dan Persamaan Diferensial Parsial *(Partial Differential Equation)*. Dalam penelitian ini, penulis membahas yang pertama, yang selanjutnya disebut persamaan diferensial. Salah satu penggunaan persamaan diferensial adalah dalam masalah sistem linear. Dalam ilmu aljabar biasa disebut sebagai Sistem Persamaan Linear (SPL). Dalam menyelesaikan sistem persamaan linear, biasanya dibentuk matriks terlebih dahulu sebelum mencari solusinya. Begitu pula dalam sistem persamaan diferensial linear, dapat digunakan matriks untuk menyelesaikannya.

Metode yang biasa digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial linear maupun menyelesaikan masalah nilai awal pada sistem persamaan diferensial linear adalah menggunakan metode koefisien tak-tentu, metode variasi parameter, metode eliminasi atau metode operator (Ross, 1984: 270), metode matriks (Nagle, 2004: 305), yakni dengan mencari nilai karakteristik *(eigen values)* dan vektor eigen *(eigen vector)*, atau dengan menggunakan matriks eksponensial (Zill, 2009: 334) dan yang lainnya. Dalam tulisan ini penulis akan menjelaskan suatu metode lain untuk menyelesaikan masalah nilai awal pada sistem persamaan diferensial linear. Metode tersebut adalah Metode Transformasi Laplace Matriks.

Metode Transformasi Laplace Matriks pada dasarnya merupakan metode gabungan antara Metode Transformasi Laplace dengan Metode Matriks. Metode Transformasi Laplace (*Laplace Transform*) merupakan suatu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal pada persamaan diferensial linear koefisien konstan dengan cara mengubah domain t dengan domain s menggunakan persamaan aljabar (Nagle, 2004: 349) atau menggunakan tabel yang memuat Transformasi Laplace. Metode ini pertama kali diperkenalkan oleh *Pierre Simon Marquas De Laplace* (1749 – 1827), seorang matematikawan Perancis dan seorang guru besar di Paris (Fathani, 2008: 432). Keunggulan Transformasi Laplace adalah bahwa masalah nilai awal persamaan diferensial linear dapat diselesaikan secara langsung tanpa terlebih dahulu menentukan solusi umumnya atau persamaan-persamaan nonhomogen dapat diselesaikan tanpa terlebih dahulu menyelesaikan persamaan homogen-nya (Kartono, 2012: 80). Dalam sistem persamaan diferensial linear, Transformasi Laplace dan Inversinya digunakan dengan terlebih dahulu mengubah koefisien-koefisien pada sistem tersebut kedalam bentuk matriks. Oleh karena itu, metode ini disebut Metode Transformasi Laplace Matriks.

Metode Transformasi Laplace Matriks, seperti halnya metode lain dalam menyelesaikan masalah nilai awal, juga dapat diterapkan pada masalah-masalah yang melibatkan sistem persamaan diferensial, terutama di bidang fisika. Dalam tulisan ini, penulis akan menerapkan Metode Transformasi Laplace Matriks untuk mencari solusi pada Sistem Pegas Massa *(Spring-Mass Systems)*.

Metode Transformasi Laplace Matriks

Dalam menyelesaikan masalah awal pada sistem persamaan diferensial linear, atau biasa disebut sebagai *sistem linear*, ada beberapa cara atau metode yang digunakan, sebagaimana yang telah disebutkan di awal bab. Semua metode-metode itu digunakan untuk menemukan solusi umum dari sistem linear, kecuali jika telah diketahui nilai awalnya, maka disebut sebagai *masalah nilai awal* dari sistem linear, maka baru dapat ditentukan solusi khususnya.

Metode yang penulis bahas disini, yakni Metode Transformasi Laplace Matriks, akan digunakan untuk menemukan solusi khusus secara langsung, tanpa harus mencari solusi khusus terlebih dahulu. Oleh karena itu, sistem linear yang digunakan harus berbentuk masalah nilai awal.

Metode Transformasi Laplace Matriks pada dasarnya adalah gabungan dua metode dalam menyelesaikan sistem linear, yakni metode Matriks dan metode Transformasi Laplace. Pada bab ini akan dijelaskan mengenai Metode Transformasi Laplace Matriks dan penggunaannya dalam menyelesaikan masalah nilai awal (MNA) dari sistem linear

Penerapan Metode Transformasi Laplace

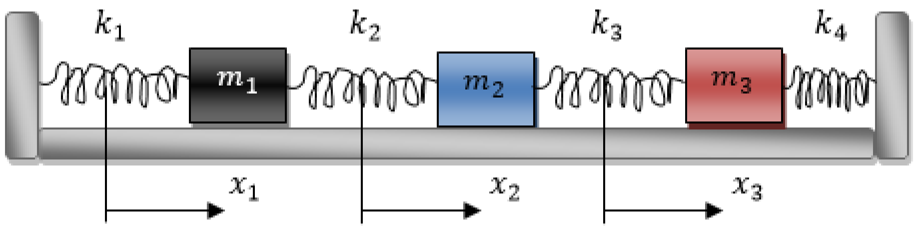
Matriks Pada Sistem Pegas Massa
Sistem Pegas Massa

Sebagaimana telah dijelaskan pada bab II, bahwa sistem pegas massa sederhana berbentuk

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

yang meggunakan hukum Newton II dan hukum Hooke.

Sistem pegas massa yang lebih kompleks adalah sistem pegas massa bergandengan *(spring-coupled masses)* dengan derajat kebebasan lebih dari dua –dengan kata lain, pegas dan massanya lebih dari dua. Misalnya berbentuk sebagai berikut



p-ISSN: 2655-3511; e-ISSN: 2656-307X
DOI : 10.30762/f m.v2i1.1683

Gambar 2. (Edward, 2005: 428) Sistem pegas massa bergandengan tiga *(three spring-coupled masses).*

Gambar 2. adalah tiga massa yang terhubung satu sama lain dengan pegas dan dengan dua dinding pada masing-masing ujungnya. Di asumsikan bahwa massa bergeser bolak-balik tanpa gesekan, dan bahwa masing-masing pegas memenuhi hukum Hooke, yakni pemuluran dan pemampatan x dan reaksi gaya F sesuai dengan persamaan $F = -kx$.

Jika pergeseran ke sisi kanan x_1, x_2, x_3 dari tiga massa (dari posisi ekuilibriumnya berturut-turut) semuanya positif, maka

- Pegas pertama meregang dengan jarak x_1;
- Pegas kedua meregang dengan jarak $x_2 - x_1$;
- Pegas ketiga meregang dengan jarak $x_3 - x_2$;
- Pegas keempat memampat dengan jarak x_3.

Oleh karena itu, aplikasi hukum Newton $F = ma$ pada tiga massa (Gambar 4.1). Hasil persamaan geraknya adalah

$$m_1x_1" = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1),$$
$$m_2x_2" = -k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_3 - x_2)$$
$$m_3x_3" = -k_3(x_3 - x_2) - k_4x_3.$$
(4.1)

Pada term pergeseran vektor $x = [x_1 \;\; x_2 \;\; x_3]^T$, matriks massanya adalah

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}.$$
(4.2)

dan matriks kekakuan *(stiffness matrix)*

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 & 0 \\ k_2 & -(k_2 + k_3) & k_3 \\ 0 & k_3 & -(k_3 + k_4) \end{bmatrix}$$
(4.3)

Sistem dalam (4.1) memiliki bentuk matriks

$$\boldsymbol{MX}'' = \boldsymbol{KX}$$
(4.4)

Notasi dalam persamaan (4.1) sampai persamaan (4.4) digeneralisir melalui cara alami pada sistem n massa yang dipasangkan pegas *(spring-coupled masses)* ditunjukkan dalam gambar 4.1. Bentuk matriks massanya adalah

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix}$$
(4.5)

dan

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 & 0 & \dots & 0 \\ k_2 & -(k_2 + k_3) & k_3 & \dots & 0 \\ 0 & k_3 & -(k_3 + k_4) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k_4 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & -(k_{n-1} + k_n) & k_n \\ 0 & 0 & \dots & k_n & -(k_{n-1} + k_n) \end{bmatrix}$$

adalah matriks kekakuan *(stiffness matrix)* dalam persamaan (4.4).

Matriks diagonal $\boldsymbol{M}$ adalah nonsingular. Untuk mendapatkan inversnya $\boldsymbol{M^{-1}}$ adalah dengan mengganti elemen diagonal lainnya dengan resiproknya. Dengan demikian, perkalian sisi lainnya dalam persamaan (4.4) oleh $\boldsymbol{M^{-1}}$ merupakan *sistem orde dua homogen*

$$\boldsymbol{X}'' = \boldsymbol{AX} \qquad (4.6)$$

Persamaan matriks (4.6) merupakan bentuk sistem pegas massa tanpa redaman dan tanpa gaya eksternal –misalnya gaya gesek *(friction force)*. Jika memiliki gaya eksternal, persamaan menjadi

$$\boldsymbol{X}'' = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{t}) \qquad (4.7)$$

dimana $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{t}) \neq 0$ adalah gaya eksternal, dapat berupa gaya gesek atau yang lainnya. Untuk sistem pegas massa gerak bebas dengan redaman *(free motion with damped)*, persamaannya lebih bersifat spesifik, karena tergantung pada posisi peredamnya.

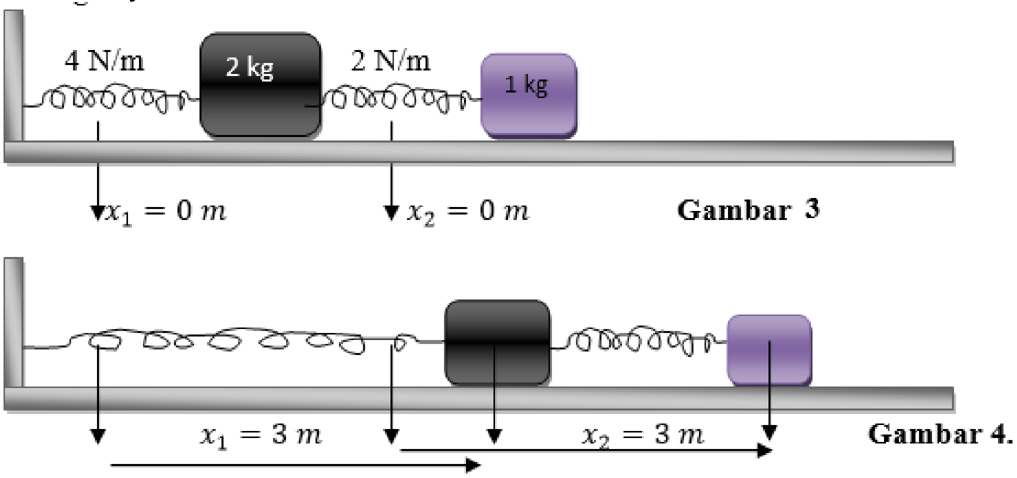
Selanjutnya akan diberikan contoh penyelesaian sistem pegas massa untuk masing-masing bentuknya, yakni gerak bebas tanpa redaman *(undamped free motion)*, gerak bebas dengan redaman *(free motion with damped)*, serta gerak bebas dipaksa *(forced motion)* menggunakan Metode Transformasi Laplace Matriks.

Sistem Pegas Massa Gerak Bebas *(Free Motion)*

Gerak Bebas Tanpa Redaman (*Free, Undamped Motion*)

Sistem 4.1

Diketahui (Nagle, 2004: 279) sistem pegas massa dengan dua pegas dan dua massa yang saling terhubung yang terikat ujung kanannya dan terletak pada bidang horisontal yang licin (tanpa gesekan). $m_1 = 2\ kg$, $m_2 = 1\ kg$, $k_1 = 4\ N/m$, $k_2 = 2\ N/m$. Lebih jelasnya lihat gambar 4.2.



Berdasarkan Hukum Newton II dan Hukum Hooke (hlm. 44–45), bentuk persamaan dari gambar 4.2 adalah

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = F_1 + F_2$$
$$= -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1)$$

 p-ISSN: 2655-3511; e-ISSN: 2656-307X
DOI : 10.30762/f_m.v2i1.1683

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = F_3 = -k_2(x_2 - x_1)$$

atau

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2$$
$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = k_2x_1 - k_2x_2$$

(4.8)

Pada sistem di atas, diketahui massa $m_1 = 2\ kg$, massa $m_2 = 1\ kg$, konstanta pegas $k_1 = 4\ N/m$ dan konstanta pegas $k_2 = 2\ N/m$. Disubstitusikan ke persamaan menjadi

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -3x_1 + x_2$$
$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = 2x_1 - 2x_2$$

Persamaan di atas adalah bentuk normal dari sistem persamaan diferensial orde dua koefisien konstan, maka dapat dibentuk sistem matriks $\boldsymbol{X}'' = \boldsymbol{AX}$ menjadi

$$\begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Berdasarkan gambar 4.3, posisi benda x_1 dan x_2 masing bergeser sepanjang 3 meter ke kanan pada saat $t = 0$. Maka, diketahui Masalah Nilai Awal dari sistem di atas adalah $x_1(0) = x_2(0) = 3\ m$ dan $x_1'(0) = x_2'(0) = 0$.

Selanjutnya, persamaan (4.1) dibentuk Transformasi Laplace menjadi

$$\mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{bmatrix}\right\} = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right\} \quad (4.10)$$

Berdasarkan sifat linearitas Transformasi, persamaan (4.9) menjadi

$$\mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right\} \quad (4.11)$$

Berdasarkan sifat derivatif Transformasi Laplace, persamaan (4.11) menjadi

$$s^2\widehat{\boldsymbol{X}} - s\boldsymbol{X}(\boldsymbol{0}) - \boldsymbol{X}'(\boldsymbol{0}) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{X}} \quad (4.12)$$

dengan $\widehat{\boldsymbol{x}}$ adalah notasi Transformasi Laplace Matriks untuk $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{0}) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{0}) = \begin{bmatrix} x_1'(0) \\ x_2'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Maka persamaan (4.12) menjadi

$$s^2\widehat{\boldsymbol{X}} - s\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{X}}$$
$$\rightarrow s^2\widehat{\boldsymbol{X}} - \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{X}} = s\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$\rightarrow \left\{\begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\right\}\widehat{\boldsymbol{X}} = s\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$\rightarrow \left\{\begin{bmatrix} s^2+3 & -1 \\ -2 & s^2+2 \end{bmatrix}\right\}\hat{x} = s\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya kedua sisi dikalikan $\left(\begin{bmatrix} s^2+3 & -1 \\ -2 & s^2+2 \end{bmatrix}\right)^{-1}$ didapat

$$\rightarrow \widehat{\boldsymbol{X}} = \left(\begin{bmatrix} s^2+3 & -1 \\ -2 & s^2+2 \end{bmatrix}\right)^{-1} s\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$\rightarrow \widehat{\boldsymbol{X}} = \frac{\begin{bmatrix} s^2+2 & 1 \\ 2 & s^2+3 \end{bmatrix}}{(s^2+3)(s^2+2) - 2}\begin{bmatrix} 3s \\ 3s \end{bmatrix}$$
$$\rightarrow \widehat{\boldsymbol{X}} = \frac{\begin{bmatrix} 3s^3 + 6s + 3s \\ 6s + 3s^3 + 9s \end{bmatrix}}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

Menggunakan metode pecahan parsial (hlm. 37-42), menjadi

$$\widehat{\boldsymbol{X}} = \frac{\begin{bmatrix} 3s^3 + 9s \\ 3s^3 + 15s \end{bmatrix}}{(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{As + B}{(s^2+4)} + \frac{Cs + D}{(s^2+1)} \quad (4.13)$$

$$\rightarrow \hat{\boldsymbol{X}} = \frac{\begin{bmatrix} 3s^3 + 9s \\ 3s^3 + 15s \end{bmatrix}}{(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{(As+B)(s^2+1)+(Cs+D)(s^2+4)}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

$$\rightarrow \hat{\boldsymbol{X}} = \frac{\begin{bmatrix} 3s^3 + 9s \\ 3s^3 + 15s \end{bmatrix}}{(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{(As^3+As+Bs^2+B)+(Cs^3+4Cs+Ds^2+4D)}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

$$\rightarrow \hat{\boldsymbol{X}} = \frac{\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} s^3 + \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix} s}{(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{(A+C)s^3+(B+D)s^2+(A+4C)s+(B+4D)}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

$(A+C) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ dan $(A+4C) = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix}$.

Menggunakan cara eliminasi, diperoleh
$3C = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix}$ atau $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ dan $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.
Maka persamaan (4.13) menjadi

$$\hat{\boldsymbol{X}} = \frac{\begin{bmatrix} 3s^3 + 9s \\ 3s^3 + 15s \end{bmatrix}}{(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} s}{(s^2+4)} + \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} s}{(s^2+1)} \qquad (4.14)$$

Menggunakan Invers Transformasi Laplace dan sifat linearitasnya,

$$\mathcal{L}^{-1}\{\hat{\boldsymbol{X}}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} s}{(s^2+4)} + \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} Cs}{(s^2+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} s}{(s^2+4)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} s}{(s^2+1)}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\hat{\boldsymbol{X}}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} s}{(s^2+4)} + \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} Cs}{(s^2+1)}\right\} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)}\right\} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)}\right\}$$

persamaan (4.14) menjadi

$\boldsymbol{X} = \frac{\begin{bmatrix} 3s^3+9s \\ 3s^3+15s \end{bmatrix}}{(s^2+4)(s^2+1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} cos2t + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} cost$

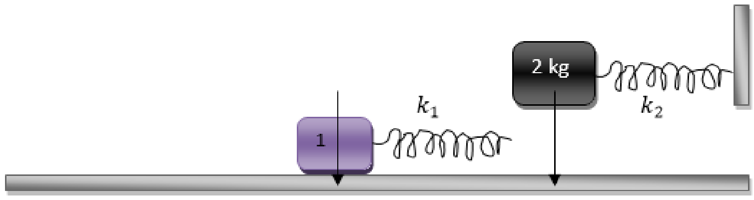
atau $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos2t + 2cost \\ -cos2t + 4cost \end{bmatrix}$

Jadi persamaan sistem 4.1adalah
$x_1 = cos2t + 2cost$ dan
$x_2 = -cos2t + 4cost$. ■

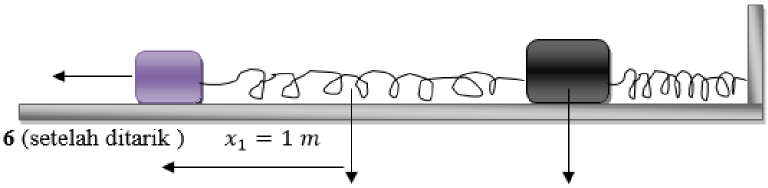
Sistem 4.2

Dua pegas dan dua massa dipasangkan pada bidang horisontal dengan permukaan tanpa gesekan *(frictionless)* sebagaimana gambar (Nagle, 2004: 284). Ketika ditarik, massa m_2 tetap pada posisi ekuilibriumnya dan massa m_1 bergeser ke kiri dari posisi ekuilibriumnya dengan jarak 1 meter dan kemudian dilepaskan. Nyatakan bentuk persamaan untuk sistem ini dan tentukan persamaan gerak untuk dua massa tersebut jika $m_1 = 1\,kg$, $m_2 = 2\,kg$, konstanta pegas $k_1 = 4\frac{N}{m}$, konstanta pegas $k_2 = \frac{10}{3}\frac{N}{m}$.

p-ISSN: 2655-3511; e-ISSN: 2656-307X
DOI : 10.30762/f_m.v2i1.1683



Gambar 5 (kedudukan awal) $x_1 = 0$ $x_2 = 0$



Gambar 6 (setelah ditarik) $x_1 = 1\ m$

Jawab :
Bentuk persamaan sistem 4.2 adalah

$$m_1x_1'' = k_1(x_2 - x_1)$$
$$m_2x_2'' = -k_1(x_2 - x_1) - k_2x_2. \quad (4.15)$$

Telah diketahui sebelumnya bahwa setelah ditarik, massa m_1 bergeser ke kiri sejauh 1 meter dan massa m_2 tetap pada posisi ekuibrium, keduanya pada saat $t = 0$. Dengan demikian, $x_1(0) = -1$, $x_2(0) = 0$ dan kecepatan keduanya adalah $x_1'(0) = 0$, $x_2'(0) = 0$. Maka persamaan (4.15) merupakan masalah nilai awal.

Untuk mendapatkan persama-an gerak dari sistem 4.2, akan digunakan Metode Transformasi Laplace Matriks. Selanjutnya, dengan memasukkan konstanta-konstanta yang telah diketahui, maka persamaan (4.15) menjadi

$$x_1'' = 4(x_2 - x_1) \quad ;$$
$$x_1(0) = -1, \quad x_1'(0) = 0$$
$$2x_2'' = -4(x_2 - x_1) - \frac{10}{3}x_2 \quad ;$$
$$x_2(0) = 0, \quad x_2'(0) = 0$$

atau

$$x_1'' = -4x_1 + 4x_2 \quad ;$$
$$x_1(0) = -1, \quad x_1'(0) = 0$$
$$x_2'' = 2x_1 - \frac{11}{3}x_2 \quad ;$$
$$x_2(0) = 0, \quad x_2'(0) = 0$$

(4.16)

Dibentuk matriks menjadi

$$\begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -\frac{11}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad ;$$
$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1'(0) \\ x_2'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{bmatrix}\right\} = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -\frac{11}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right\} ;$$
$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1'(0) \\ x_2'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(4.18)

mengikuti sifat derivatif Transformasi Laplace, persamaan (4.18) menjadi

$$s^2\widehat{\boldsymbol{X}} - s\boldsymbol{X}(\boldsymbol{0}) - \boldsymbol{X}'(\boldsymbol{0}) = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -\frac{11}{3} \end{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{X}} \ ;$$
$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{0}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{X}'(\boldsymbol{0}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(4.19)

dengan $\widehat{\boldsymbol{X}}$ adalah notasi Transformasi Laplace Matriks untuk $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{0}) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{0}) = \begin{bmatrix} x_1'(0) \\ x_2'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Maka persamaan (4.19) menjadi

$$s^2\widehat{\boldsymbol{X}} - s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -\frac{11}{3} \end{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{X}}$$

$$\rightarrow s^2\widehat{\boldsymbol{X}} - \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -\frac{11}{3} \end{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{X}} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \left\{\begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -\frac{11}{3} \end{bmatrix}\right\}\widehat{\boldsymbol{X}} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \left\{\begin{bmatrix} s^2+4 & -4 \\ -2 & s^2+\frac{11}{3} \end{bmatrix}\right\}\widehat{\boldsymbol{X}} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya kedua sisi dikalikan $\left(\begin{bmatrix} s^2+4 & -4 \\ -2 & s^2+\frac{11}{3} \end{bmatrix}\right)^{-1}$ didapat

$$\rightarrow \widehat{\boldsymbol{X}} = \left(\begin{bmatrix} s^2+4 & -4 \\ -2 & s^2+\frac{11}{3} \end{bmatrix}\right)^{-1} s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \widehat{\boldsymbol{X}} = \frac{\begin{bmatrix} s^2+\frac{11}{3} & 4 \\ 2 & s^2+4 \end{bmatrix}}{(s^2+4)\left(s^2+\frac{11}{3}\right)-8}\begin{bmatrix} -s \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \widehat{\boldsymbol{X}} = \frac{\begin{bmatrix} -s^3-\frac{11}{3}s \\ -2s \end{bmatrix}}{s^4+\frac{23}{3}s^2+\frac{20}{3}}$$

Menggunakan metode pecahan parsial, menjadi

$$\rightarrow \widehat{\boldsymbol{X}} = \frac{\begin{bmatrix} -s^3-\frac{11}{3}s \\ -2s \end{bmatrix}}{(s^2+1)\left(s^2+\frac{20}{3}\right)} = \frac{As+B}{(s^2+1)} + \frac{Cs+D}{\left(s^2+\frac{20}{3}\right)} \tag{4.20}$$

$$\rightarrow \widehat{\boldsymbol{X}} = \frac{\begin{bmatrix} -s^3-\frac{11}{3}s \\ -2s \end{bmatrix}}{(s^2+1)\left(s^2+\frac{20}{3}\right)} = \frac{(As+B)\left(s^2+\frac{20}{3}\right)+(Cs+D)(s^2+1)}{(s^2+1)\left(s^2+\frac{20}{3}\right)}$$

$$\rightarrow \widehat{\boldsymbol{X}} = \frac{\begin{bmatrix} -s^3-\frac{11}{3}s \\ -2s \end{bmatrix}}{(s^2+1)\left(s^2+\frac{20}{3}\right)}$$

$$= \frac{\left(As^3+\frac{20}{3}As+Bs^2+\frac{20}{3}B\right)+(Cs^3+Cs+Ds^2+D)}{(s^2+1)\left(s^2+\frac{20}{3}\right)}$$

$$\rightarrow \widehat{\boldsymbol{X}} = \frac{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}s^3 + \begin{bmatrix} -\frac{11}{3} \\ -2 \end{bmatrix}s}{(s^2+1)\left(s^2+\frac{20}{3}\right)}$$

$$= \frac{(A+C)s^3+(B+D)s^2+(\frac{20}{3}A+C)s+(\frac{20}{3}B+D)}{(s^2+1)\left(s^2+\frac{20}{3}\right)}$$

Maka $(A+C) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Dan $\left(\frac{20}{3}A+C\right) = \begin{bmatrix} -\frac{11}{3} \\ -2 \end{bmatrix}$.

Menggunakan cara eliminasi, diperoleh

$\frac{17}{3}A = \begin{bmatrix} -\frac{8}{3} \\ -2 \end{bmatrix}$ atau $A = \begin{bmatrix} -\frac{8}{17} \\ -\frac{6}{17} \end{bmatrix}$ dan

$C = \begin{bmatrix} -\frac{9}{17} \\ \frac{6}{17} \end{bmatrix}$. Maka persamaan (4.20) menjadi

p-ISSN: 2655-3511; e-ISSN: 2656-307X
DOI : 10.30762/f_m.v2i1.1683

$$\to \widehat{\boldsymbol{X}} = \frac{\begin{bmatrix} -s^3 - \frac{11}{3}s \\ -2s \end{bmatrix}}{(s^2+1)\left(s^2+\frac{20}{3}\right)} = \frac{\begin{bmatrix} -\frac{8}{17} \\ -\frac{6}{17} \end{bmatrix} s}{(s^2+1)} + \frac{\begin{bmatrix} -\frac{9}{17} \\ \frac{6}{17} \end{bmatrix} s}{\left(s^2+\frac{20}{3}\right)} \tag{4.21}$$

Menggunakan Invers Transformasi Laplace dan sifat linearitasnya,

$$\mathcal{L}^{-1}\{\widehat{\boldsymbol{X}}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\begin{bmatrix} -\frac{8}{17} \\ -\frac{6}{17} \end{bmatrix} s}{(s^2+1)} + \frac{\begin{bmatrix} -\frac{9}{17} \\ \frac{6}{17} \end{bmatrix} s}{\left(s^2+\frac{20}{3}\right)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\begin{bmatrix} -\frac{8}{17} \\ -\frac{6}{17} \end{bmatrix} s}{(s^2+1)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\begin{bmatrix} -\frac{9}{17} \\ \frac{6}{17} \end{bmatrix} s}{\left(s^2+\frac{20}{3}\right)}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\widehat{\boldsymbol{X}}\} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{17} \\ -\frac{6}{17} \end{bmatrix} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)}\right\} + \begin{bmatrix} -\frac{9}{17} \\ \frac{6}{17} \end{bmatrix} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+\frac{20}{3}\right)}\right\} \tag{4.22}$$

Berdasarkan tabel Transformasi Laplace, persamaan (4.22) menjadi

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{17} \\ -\frac{6}{17} \end{bmatrix} cost + \begin{bmatrix} -\frac{9}{17} \\ \frac{6}{17} \end{bmatrix} cos\sqrt{\frac{20}{3}}t \text{ atau}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{17}cost - \frac{9}{17}cos\sqrt{\frac{20}{3}}t \\ -\frac{6}{17}cost + \frac{6}{17}cos\sqrt{\frac{20}{3}}t \end{bmatrix}$$

Jadi persamaan gerak sistem 4.2 adalah

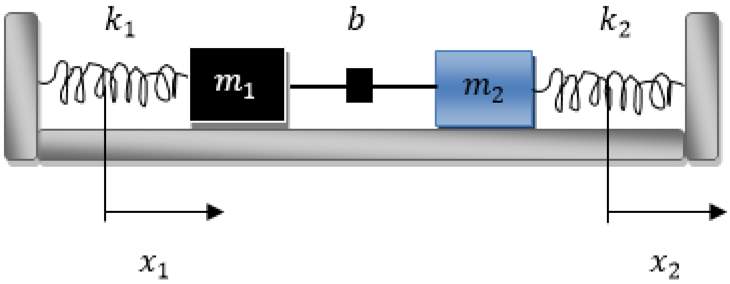
$x_1 = -\frac{8}{17}cost - \frac{9}{17}cos\sqrt{\frac{20}{3}}t$ dan

$x_2 = -\frac{6}{17}cost + \frac{6}{17}cos\sqrt{\frac{20}{3}}t.$ ■

Gerak Bebas Dengan Redaman (*Free, Damped Motion*)

Sistem 4.3

Dua pegas dengan konstanta pegas k_1 dan k_2, dua massa m_1 dan m_2, dan sebuah *dashpot* b (semacam peredam, misalnya piston pada kendaraan bermotor) dipasangkan pada bidang horisontal tanpa gesekan sebagaimana gambar 4.6.



Gambar 7. Sistem pegas massa dengan peredam *dashpot* di tengah.

Sistem diatur sedemikian rupa sehingga pada kondisi awal, massa m_2 tetap pada posisi ekuilibriumnya dan massa m_1 digeser ke kiri dari posisi ekuilibrium dengan jarak 2 meter dan kemudian dilepaskan. Tentukan persamaan gerak untuk kedua massanya jika $m_1 = m_2 = 1\ kg$, $k_1 = k_2 = 1\ N/m$, dan $b = 1\ Nsec/m$. *Dashpot* meredam kedua massa m_1 dan m_2 dengan gaya $F = b|x_2' - x_1'|$.

Bentuk persamaan sistem pegas massa di atas adalah

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -k_1 x_1 + b|x_2' - x_1'| \\ m_1 x_1'' &= -b|x_2' - x_1'| - k_2 x_2 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Dengan merujuk pada bentuk sistem pegas massa bentuk matriks persamaan (4.4), yakni $\boldsymbol{MX''} = \boldsymbol{KX}$, dengan matriks massa $\boldsymbol{M}$ dan matriks kekakuan $\boldsymbol{K}$, maka persamaan (4.23) menjadi

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b & b \\ b & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

Selanjutnya memasukkan entri-entri yang telah diketahui, didapat

$$\begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

Persamaan (4.24) diubah ke dalam bentuk Transformasi Laplace, dan sekaligus menggunakan sifat derivatifnya (teorema 2.28), didapat

$$\begin{aligned} & s^2 \widehat{\boldsymbol{X}} - s\boldsymbol{X}(\boldsymbol{0}) - \boldsymbol{X}'(\boldsymbol{0}) \\ &= -\widehat{\boldsymbol{X}} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} (s\widehat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{0})) \end{aligned} \tag{4.26}$$

Dengan mengelompokkan term $\hat{x}$ ke sisi kiri dan lainnya ke sisi kanan, maka

$$\begin{aligned} & s^2 \widehat{\boldsymbol{X}} + \widehat{\boldsymbol{X}} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} s\widehat{\boldsymbol{X}} \\ &= s\boldsymbol{X}(\boldsymbol{0}) - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{X}(\boldsymbol{0}) + \boldsymbol{X}'(\boldsymbol{0}) \end{aligned} \tag{4.27}$$

Selanjutnya mengubah bentuk skalar menjadi matriks, dengan mengalikannya dengan identitas matriks $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan memasukkan nilai awalnya, persamaan (4.27) menjadi

$$\left(\begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s & -s \\ -s & s \end{bmatrix} \right) \widehat{\boldsymbol{X}} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} s^2 + s + 1 & -s \\ -s & s^2 + s + 1 \end{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} -2s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Untuk mendapatkan $\widehat{\boldsymbol{X}}$ adalah dengan mengalikan kedua sisi dengan $\begin{bmatrix} s^2 + s + 1 & -s \\ -s & s^2 + s + 1 \end{bmatrix}^{-1}$. Maka

$$\widehat{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} s^2 + s + 1 & -s \\ -s & s^2 + s + 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2s - 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \widehat{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{(s^2 + s + 1)(s^2 + s + 1) - s^2} \begin{bmatrix} s^2 + s + 1 & s \\ s & s^2 + s + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2s - 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

p-ISSN: 2655-3511; e-ISSN: 2656-307X
DOI : 10.30762/f m.v2i1.1683

$$\rightarrow \widehat{\boldsymbol{X}} = \frac{\begin{bmatrix} -2s^3 - 4s^2 - 2s - 2 \\ 2 \end{bmatrix}}{s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$
$$\rightarrow \widehat{\boldsymbol{X}} = \frac{\begin{bmatrix} -2s^3 - 4s^2 - 2s - 2 \\ 2 \end{bmatrix}}{(s+1)^2(s^2+1)}$$

Selanjutnya adalah menggunakan metode pecahan parsial (hlm. 37-42)

$$\widehat{\boldsymbol{X}} = \frac{\begin{bmatrix} -2s^3 - 4s^2 - 2s - 2 \\ 2 \end{bmatrix}}{(s+1)^2(s^2+1)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{Cs + D}{(s^2+1)} \qquad (4.28)$$

Untuk menentukan nilai pembilang A, B, C dan D, maka

$$\begin{bmatrix} -2s^3 - 4s^2 - 2s - 2 \\ 2 \end{bmatrix} = A(s+1)(s^2+1) + B(s^2+1) + (Cs + D)(s^2 + 2s + 1)$$

$$= (A + C)s^3 + (A + B + 2C + D)s^2 + (A + C + 2D)s + (A + B + D)$$

Selanjutnya didapat

1. $A + C = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$,
2. $A + B + 2C + D = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$,
3. $A + C + 2D = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$,
4. $A + B + D = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Dengan mensubstitusikan (1) pada (3), diperoleh

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} + 2D = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian persamaan (4) menjadi

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Substitusikan (4) pada (2), didapat

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} + 2C = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Persamaan (1) menjadi $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Terakhir, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Kembali ke persamaan (4.27) dan dimasukkan nilai A, B, C, D, menjadi

$$\widehat{\boldsymbol{X}} = \frac{\begin{bmatrix} -2s^3 - 4s^2 - 2s - 2 \\ 2 \end{bmatrix}}{(s+1)^2(s^2+1)} = \frac{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}{(s+1)} + \frac{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}{(s+1)^2} + \frac{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} s}{(s^2+1)}$$

Untuk mendapat persamaan gerak $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, adalah dengan menggunakan Invers Transformasi Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\{\widehat{\boldsymbol{X}}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}{(s+1)} + \frac{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}{(s+1)^2} + \frac{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} s}{(s^2+1)}\right\}$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}{(s+1)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}{(s+1)^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} s}{(s^2+1)}\right\}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} te^{-t} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cos t$$

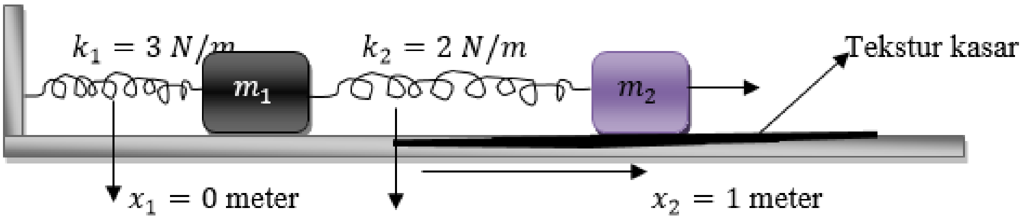
Sehingga persamaan gerak sistem 4.3 adalah

$x_1(t) = -e^{-t} - te^{-t} - \cos t$ dan
$x_2(t) = e^{-t} + te^{-t} - \cos t$ ■

Sistem Pegas Massa Gerak Paksa (*Forced Motion*)

Sistem 4.4

Diberikan suatu sistem pegas massa dengan dua pegas dan dua massa yang saling terhubung dan terikat ujung kanannya, serta kondisi bidang horisontal yang berbeda teksturnya. Untuk massa m_1 terletak pada bidang licin, sedangkan m_2 terletak pada bidang kasar, sehingga ketika bergerak menghasilkan gaya gesek sebesar $3\sin 2t$ Newton. $m_1 = m_2 = 1\ kg, k_1 = 3\ N/m$ dan $k_2 = 2\ N/m$. Posisi benda x_1 saat $t = 0$ berada pada posisi ekuilibriumnya, sedangkan x_2 saat $t = 0$ bergeser ke kanan sejauh 1 meter. Lebih jelasnya lihat gambar 4.7.



Gambar 8. Sistem pegas massa dengan sebagian tekstur kasar.

Berdasarkan persamaan (4.8), maka sistem di atas berbentuk

$$x_1''(t) + 5x_1(t) - 2x_2(t) = 0 \qquad x_1(0) = x_1'(0) = 0$$

$$x_2''(t) + 2x_2(t) - 2x_1(t) = 3\sin 2t \qquad x_2(0) = 1\,, x_2'(0) = 0$$

atau

$$x_1''(t) = -5x_1(t) + 2x_2(t)\ , \quad x_1(0) = x_1'(0) = 0$$

$$x_2''(t) = 2x_1(t) - 2x_2(t) + 3\sin 2t, \quad x_2(0) = 1\,, x_2'(0) = 0$$

Selanjutnya akan dicari persamaan gerak $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ untuk sistem pegas massa yang memenuhi masalah awal sistem di atas. Dibentuk matriks

$$\begin{bmatrix} x_1''(t) \\ x_2''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3\sin 2t \end{bmatrix}$$

atau berbentuk

$$\boldsymbol{X}'' = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{F}.$$

Sistem ini dikatakan sistem pegas gerak paksa karena terdapat gaya eksternal yang mempengaruhinya, yakni $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3\sin 2t \end{bmatrix} \neq 0$. Selanjutnya diselesaikan menggunakan Metode Transformasi Laplace Matriks.

1. Menggunakan Transformasi Laplace untuk kedua sisi, menjadi

$$s^2\widehat{\boldsymbol{X}} - s\boldsymbol{X}(\boldsymbol{0}) - \boldsymbol{X}'(\boldsymbol{0}) = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{X}} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{6}{s^2+4} \end{bmatrix}$$

2. Mengelompokkan fungsi Transformasi Laplace Matriks $\widehat{\boldsymbol{X}}$ ke sisi kiri persamaan

$$\left(\begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\right)\widehat{\boldsymbol{X}} = s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{6}{s^2+4} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} s^2+5 & -2 \\ -2 & s^2+2 \end{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{s^3+4s+6}{s^2+4} \end{bmatrix}$$

3. Mengalikan kedua sisi dengan $\begin{bmatrix} s^2+5 & -2 \\ -2 & s^2+2 \end{bmatrix}^{-1}$, menjadi

p-ISSN: 2655-3511; e-ISSN: 2656-307X
DOI : 10.30762/f_m.v2i1.1683

$$\widehat{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{(s^2+5)(s^2+2)-4}\begin{bmatrix} s^2+2 & 2 \\ 2 & s^2+5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{s^3+4s+6}{s^2+4} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \widehat{\boldsymbol{X}} = \frac{\begin{bmatrix} \dfrac{2s^3+8s+12}{s^2+4} \\ \dfrac{s^5+9s^3+6s^2+20s+30}{s^2+4} \end{bmatrix}}{(s^2+5)(s^2+2)-4}$$

$$\rightarrow \widehat{\boldsymbol{X}} = \frac{\begin{bmatrix} 2s^3+8s+12 \\ s^5+9s^3+6s^2+20s+30 \end{bmatrix}}{(s^2+1)(s^2+6)(s^2+4)}$$

4. Selanjutnya menggunakan metode pecahan parsial

$$\widehat{\boldsymbol{X}} = \frac{\begin{bmatrix} 2s^3+8s+12 \\ s^5+9s^3+6s^2+20s+30 \end{bmatrix}}{(s^2+1)(s^2+6)(s^2+4)} = \frac{As+B}{(s^2+1)} + \frac{Cs+D}{(s^2+6)} + \frac{Es+F}{(s^2+4)}$$

sehingga diperoleh

$$\widehat{\boldsymbol{X}} = \frac{\begin{bmatrix} 2s^3+8s+12 \\ s^5+9s^3+6s^2+20s+30 \end{bmatrix}}{(s^2+1)(s^2+6)(s^2+4)}$$
$$= \frac{(A+C+E)s^5+(B+D+F)s^4+(10A+5C+7E)s^3+(10B+5D+7F)s^2+(24A+4C+6E)s+(24B+4D+6F)}{(s^2+1)(s^2+6)(s^2+4)}$$

Maka didapatkan $(A+C+E) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $(B+D+F) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $(10A+5C+7E) = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}$, $(10B+5D+7F) = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ $(24A+4C+6E) = \begin{bmatrix} 8 \\ 20 \end{bmatrix}$, $(24B+4D+6F) = \begin{bmatrix} 12 \\ 30 \end{bmatrix}$.
Dengan menggunakan operasi aljabar, diperoleh
$A = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 8/5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 6/5 \\ -3/5 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$.
Kembali ke persamaan awal dan disubstitusikan

$$\widehat{\mathbf{X}} = \frac{\begin{bmatrix} 2s^3+8s+12 \\ s^5+9s^3+6s^2+20s+30 \end{bmatrix}}{(s^2+1)(s^2+6)(s^2+4)}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 2/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}s + \begin{bmatrix} 4/5 \\ 8/5 \end{bmatrix}}{(s^2+1)} + \frac{\begin{bmatrix} -2/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}s + \begin{bmatrix} 6/5 \\ -3/5 \end{bmatrix}}{(s^2+6)} + \frac{\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}}{(s^2+4)}.$$

5. Terakhir, mengubah kembali ke fungsi $\boldsymbol{X}$ menggunakan Invers Transformasi Laplace menjadi

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}\cos t + \begin{bmatrix} 4/5 \\ 8/5 \end{bmatrix}\sin t + \begin{bmatrix} -2/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}\cos\sqrt{6}t + \begin{bmatrix} \sqrt{6}/5 \\ -\sqrt{6}/10 \end{bmatrix}\sin\sqrt{6}t + \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \end{bmatrix}\sin 2t.$$

Jadi persamaan gerak sistem 4.4 adalah

$x_1 = 2/5 \cos t + 4/5 \sin t - 2/5 \cos \sqrt{6}t + \sqrt{6}/5 \sin \sqrt{6}t - \sin 2t,$
dan
$x_2 = 4/5 \cos t + 8/5 \sin t + 1/5 \cos \sqrt{6}t - \sqrt{6}/10 \sin \sqrt{6}t - \frac{1}{2} \sin 2t$ ■

Kesimpulan

1. Diberikan masalah nilai awal pada sistem persamaan diferensial orde dua koefisien konstan berbentuk matriks
   $$\boldsymbol{X}'' = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{F} \qquad \boldsymbol{X}(\boldsymbol{t_0}) = \boldsymbol{X_0}\ \boldsymbol{,}\ \boldsymbol{X}'(\boldsymbol{t_0}) = \boldsymbol{X}'_{\boldsymbol{0}} \qquad (1)$$
   dapat diselesaikan dengan menggunakan Metode Transformasi Laplace Matriks melalui langkah-langkah sebagai berikut :
   a. Mengubah sistem (1) ke dalam bentuk Transformasi Laplace $\mathcal{L}\{\boldsymbol{X}''\} = \mathcal{L}\{\boldsymbol{AX} + \boldsymbol{F}\}$.
   Menggunakan sifat linearitas, $\mathcal{L}\{\boldsymbol{X}''(t)\} = \boldsymbol{A}\mathcal{L}\{\boldsymbol{X}\} + \mathcal{L}\{\boldsymbol{F}\}$**.**
   Menggunakan notasi fungsi Transformasi Laplace Matriks, $\mathcal{L}\{\boldsymbol{X}''(t)\} = \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} + \widehat{\boldsymbol{F}}(s)$
   Menggunakan sifat derivatif Transformasi Laplace,
   $$s^2\widehat{\boldsymbol{X}} - s\boldsymbol{X_0} - \boldsymbol{X}'_{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} + \widehat{\boldsymbol{F}}(s)$$
   dengan $\boldsymbol{X_0}$ dan $\boldsymbol{X}'_{\boldsymbol{0}}$ berturut-turut posisi awal dan kecepatan awal dari massa.
   b. Mengelompokkan notasi fungsi Transformasi Laplace Matriks ke sisi kiri persamaan $s^2\widehat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \widehat{\boldsymbol{F}}(s) + s\boldsymbol{X_0} + \boldsymbol{X}'_{\boldsymbol{0}}$.
   Karena s skalar, maka $s^2\boldsymbol{I}\widehat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \widehat{\boldsymbol{F}}(s) + s\boldsymbol{X_0} + \boldsymbol{X}'_{\boldsymbol{0}}$
   atau
   $(s^2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\widehat{\boldsymbol{X}} = \widehat{\boldsymbol{F}}(s) + s\boldsymbol{X_0} + \boldsymbol{X}'_{\boldsymbol{0}}$. $\boldsymbol{I}$ adalah matriks identitas.
   c. Mencari nilai $\widehat{\boldsymbol{X}}$, yakni dengan mengalikan kedua sisi dengan invers dari $(s^2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ atau $(s^2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$, menjadi
   $$\widehat{\boldsymbol{X}} = (s^2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\left(\widehat{\boldsymbol{F}}(s) + s\boldsymbol{X_0} + \boldsymbol{X}'_{\boldsymbol{0}}\right)$$
   d. Menggunakan metode pecahan parsial untuk mendapatkan faktor-faktor penyebut dari determinan $(s^2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$.
   e. Terakhir, mencari nilai $\boldsymbol{X}$, yakni dengan menentukan Invers Transformasi Laplace dari $\widehat{\boldsymbol{X}}$, didapatkan
   $$\boldsymbol{X} = \mathcal{L}^{-1}\{\widehat{\boldsymbol{X}}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s^2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\left(\widehat{\boldsymbol{F}}(s) + s\boldsymbol{X}(\boldsymbol{0}) + \boldsymbol{X}'(\boldsymbol{0})\right)\right\}$$
   Menggunakan metode ini, sistem persamaan diferensial linear dapat ditentukan solusi khususnya secara langsung.
2. Diberikan sistem pegas massa berbentuk
   $$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$
   dengan syarat awal $\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} x_1'(t_0) \\ x_2'(t_0) \end{bmatrix}$ atau bentuk perluasannya (lebih dari dua pegas dan massa), juga dapat

p-ISSN: 2655-3511; e-ISSN: 2656-307X
DOI : 10.30762/f_m.v2i1.1683

diselesaikan dengan rumus di atas, baik pada gerak bebas redam *(damped free motion)*, gerak bebas tak-redam *(undamped free motion)* maupun gerak paksa *(forced motion)*.

Kritik dan Saran

✓ Kritik

1. Metode ini masih terbatas pada penyelesaian sistem yang memiliki syarat awal
2. Penggunaan metode ini masih terbatas pada sistem linear orde dua koefisien konstan
3. Bentuk matriks dari sistem harus berukuran $n \times n$
4. Penyelesaian semakin rumit seiring bertambahnya ukuran matriks
5. Penyelesaian sistem mengalami kendala ketika menemukan determinan matriks sistem yang tidak dapat difaktorkan dengan cara biasa, sehingga harus menggunakan program.

✓ Saran

6. Peneliti lain dapat lebih mengembangkan terapan dari metode ini, tidak hanya pada sistem pegas massa, misalnya pada rangkaian listrik, tangki terhubung *(interconnected tank)* atau yang lainnya, serta memberi contoh pada sistem yang ukuran matriksnya lebih besar.

Daftar Pustaka

Edward, C. Henry, David E. Penney. 2005. *Differential Equations & Linear Algebra Second Edition*. (USA : Pearson Education International).

Fathani, Abdul Halim. 2008. *Ensiklopedi Matematika* (Yogyakarta : Ar-Ruzz Media).

Kartono. 2012. *Persamaan Diferensial Biasa* (Yogyakarta : Graha Ilmu).

Nagle, R. Kent, Edward B. Saff, Arthur David Snider. 2004. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems Fourth Edition* (USA : Pearson Adison Wesley).

Raharjanti, Woro. 2005. Skripsi Jurusan Matematika Universitas Negeri Semarang.

Ross, Shepley L. 1984. *Differential Equations* (New York : John Wiley & Sons, Inc).

Susanta, B. 2008. *Pemodelan Matematis* (Jakarta : Universitas Terbuka)

Zill, Dennis G., Michael R. Cullen. 2009. *Differential Equations with Boundary Value Problems* (USA : Brook/Cole Cengage Learning).